数理解析研究所講究録
第2034巻 2017年 121-124

流体中の非線形波動に関する研究の発展

京都大学 大学院情報学研究科　船越 満明
Mitsuaki Funakoshi
Graduate School of Informatics,
Kyoto University

本講演では、各種の外力による水面波、内部波の励起に関する過去の研究の一部を紹介し、またこれまでの水面波、内部波の研究に関連したコメントを行った。

最初に、水面波の基礎方程式系、および密度成層流体の１つである２層流体での内部波の基礎方程式系の紹介を行った。また、（自由表面と界面の両方を持つ）２層流体では、表面波モードと内部波モードの２つのモードが存在することを示し、表面波モードと内部波モードの分散曲線についても触れた。さらに、容器の加振による波の励起の問題において重要な定在波モードについても説明した。

次に、弱非線形理論について説明した。この理論においては、波の振幅は小さいが無限小ではないとし、非線形性の効果を一部取り入れる。具体的には、水面波・内部波の基礎方程式系から、振幅が小さい等の仮定の下で、摂動法によって非線形モデル方程式（偏微分方程式あるいは連立常微分方程式）を導き、それに基づいて波の非線形挙動を解析的あるいは数値的に調べる。

本講演では、さまざまな外力による波動の生成について、弱非線形理論による解析と実験の結果を説明した。具体的には、容器の共鳴的加振による水面波・内部波の生成および壁面や半没物体の振動的運動による水面波の生成に関する研究を紹介した。

容器の共鳴的加振による水面波・内部波の生成の弱非線形理論に基づく研究においては、通常、非線形性と加振と減衰の効果を含めたモデル方程式を導出し、それに基づいて非線形挙動の解析を行う。非線形挙動の例としては、カオスや解の分岐、多重平衡解とヒステリシス現象、定在波モード間のエネルギーのやりとり、特徴的な空間構造をもつ解（孤立波解、キンク解など）がある。共鳴的加振の場合がとくに重要である理由は、物理的観点からは、共鳴により波の振幅が大きくなると非線形性が重要となって上記のような多様な非線形挙動が見られる点および周期的外力の下での非線形系の非周期的な振る舞いとして興味深い点が挙げられるし、工学的観点からは、大振幅の波が励起されやすいので構造物の破壊等の大きな問題を引き起こす可能性がある点が挙げられる。

この共鳴的加振の研究では、加振の振動数が定在波のあるモードの固有振動数（の２倍）

に近い場合を主に考える。すなわち、水平方向に加振する場合は加振振動数が固有振動数に近いとし、鉛直方向に加振する場合は加振振動数が固有振動数の２倍に近いとする。このような共鳴的加振の場合、加振振幅が小さくても当該モードの大振幅の波が作られ、この現象はしばしば外部共鳴と呼ばれる。一方、定在波の２つのモードの固有振動数が簡単な整数比（１：１、１：２、１：３など）に近いときには、共鳴によってモード間のエネルギーの移動が起こることがあり、この現象はしばしば内部共鳴と呼ばれる。そして、外部共鳴と内部共鳴が同時に起こる場合を考えることもできる。

容器の共鳴的加振の場合は少数個の定在波モードだけが大きく励起されるが、この励起される波の波長と容器の水平方向の大きさの関係によって、モデル方程式の形や注目される挙動が異なる。すなわち、アスペクト比が小さい（波の波長が容器の大きさと同程度）場合は、モデル方程式は励起されるモードの複素振幅のゆるやかな時間発展に関する非線形連立常微分方程式系となる。そして、この方程式系の解の示すカオス、加振パラメータの変化に伴う解の分岐、多重平衡解、ヒステリシス現象などが主に調べられる。一方、アスペクト比が大きい（容器の大きさが波の波長よりずっと大きい）場合は、励起されるモードの振幅、位相は、時間的だけでなく空間的にもゆるやかに変化できるので、モデル方程式はこのモードの複素振幅に関する非線形偏微分方程式となる。そして、この方程式に基づいて、励起される波の空間パターンや時空カオスに関する研究などが行われている。

容器の加振による水面波の励起の研究は、古くから数多く行われ、たとえばR.A.Ibrahimが2005年に書いた“Liquid Sloshing Dynamics”の本では、引用文献数が2700に上る。この種の研究は、まず容器の加振方法によって分類される。水平の一方向の加振による波は数多く研究されており、この波の励起は（狭い意味での）スロッシングと呼ばれる。また、容器の鉛直加振による波もしばしば研究されており、パラメータ共鳴によって励起される大振幅の波はファラデー波と呼ばれる。さらに、容器の複合的な動きによる波の励起の研究もあり、たとえば容器の水平方向に楕円を描く運動や水平方向と鉛直方向の同時加振による水面波の励起の研究もある。また、容器の加振による水面波の別の分類方法として、容器の形状による分類もある。研究されているのは円筒形や直方体の容器が多いが、水平一方向に細長い容器を考える場合もある。また工学的には、多様な形状の容器での波の励起を考えたり、仕切り板等による波の抑制を目指す研究も多数ある。

本講演では、アスペクト比の小さい場合の容器の加振による水面波の励起の研究の一例として、著者らがかなり昔に行った、円筒形容器の水平方向への共鳴的加振による水面波の励起の研究を紹介した。この場合、励起される水面波は、水面変位が周方向座標 θ を用

いて $\cos\theta$ 型と $\sin\theta$ 型で表される2つの定在波モードであり、それらの固有振動数は同一である。加振振動数が固有振動数に比較的近い共鳴の場合には、波が容器の加振方向に一定振幅で振動する「1次元的振動」のほかに、水面変位の極大点が時計回りあるいは反時計回りに回転し、各点での水面の変動振幅が一定である「規則的回転」と呼ばれる挙動が見られる。しかし、加振振幅がある程度以上大きいと、加振振動数のある範囲では、規則的回転に似ているが、極大点での波の振幅や極大点の回転角速度が時間とともにゆるやかに変動するような波も見られる。そして、この変動は周期的な場合と不規則（カオス的）な場合がある。この問題の弱非線形理論に基づくモデル方程式は Miles が導いた。このモデル方程式は最低次の非線形効果しか含んでおらず、また減衰効果は線形であると仮定しているが、実験で求めた減衰係数を用いたときのモデル方程式の解は、実験結果と結構よく合う。具体的には、波の振る舞いの加振振動数と加振振幅に対する依存性が類似しているだけでなく、モデル方程式の解のホップ分岐、周期倍化分岐、対称性の破れ分岐、ホモクリニック分岐に相当する挙動が実験でも得られている。

次に、細長い容器におけるファラデー波の研究も数多くある。この場合のファラデー波は、自由表面あるいは界面をもつ流体を入れた容器を、容器の幅方向に変化し長さ方向には一様なある定在波モードの固有振動数の2倍に近い振動数で鉛直方向に加振するときに、パラメータ共鳴により生じる波である。過去の水面波の実験による研究では、この定在波の振幅が容器の長さ方向にゆるやかに変化するようなファラデー波の励起が知られている。そして、水深が大きいときにはこの波は包絡ソリトン型となり、小さいときはキンク解型となることも知られている。このファラデー波のモデル方程式としては非線形シュレディンガー方程式型の時間発展方程式が導かれており、その解の水深依存性は実験結果と整合性がある。また、このモデル方程式に線形減衰効果の項とパラメータ共鳴の外力項を付け加えた方程式の多様な解とその安定性についても詳しく調べられている。

細長い容器の中の2層流体のファラデー波については、上面が剛体壁である場合の界面のファラデー波の理論的研究が既に行われている。本講演では、上面も自由表面である2層流体でのファラデー波に関する著者らによる過去の研究を紹介した。具体的には、表面波モードと内部波モードの各々に対して、外力と減衰を表す項を伴う非線形シュレディンガー方程式をモデル方程式として導いた。そして、非線形項の係数の符号の上下層の水深に対する依存性を調べることによって、どのような水深の場合に包絡ソリトン型のファラデー波が励起されるかを明らかにした。さらに、対応する実験の結果とも比較し、ある程度整合性があることがわかった。また、ある波数 k_0 の内部波モードと波数 $3k_0$ の表面波

モードが 1:3 共鳴の条件をみたす場合についても考え、加振により励起された内部波モード（外部共鳴）から表面波モードが作り出される（内部共鳴）挙動を記述するモデル方程式の形について考察した。

また、容器の加振以外のさまざまな外力による水面波、内部波の励起に関する過去の研究についても、ごく簡単に紹介した。たとえば、壁面や半没物体の振動的運動による水面波の生成に関する有名な研究としては、まず長い水槽の一端に設置された造波機の作る波がある。この波は、造波機の動き方によって cross wave と sloshing wave の 2 種類に分けられ、いずれの場合も、モデル方程式は（外力項と減衰項を含む）非線形シュレディンガー方程式＋造波機の位置での境界条件の形になる。また、鉛直振動する半没球あるいは半没水平円筒のまわりに作られる波についての研究もあり、半没球の場合は同心円波や花びら波が観測されている。そのほかに、平らでない底面の上を流れる流体での水面波・内部波の励起や水面を動く圧力撹乱による波の励起の問題は、forced K-dV 方程式や孤立浅水波の壁面でのマッハ反射との関連もあって興味深いが、時間の都合により、これらの問題に関する研究の紹介は割愛した。

本講演の最後では、以下の点に関していくつかコメントをした。

(1) さまざまな外力による波動の生成について

(2) 弱非線形理論の fully nonlinear の数値計算結果や実験との比較について

(3) 弱非線形理論におけるモデル方程式の導出方法について

これらのコメントは十分練られたものではなく、思いつきで述べたものもあるので、その具体的内容を講究録に記載するのは差し控えることにする。

最後に、著者のこれまでの非線形波動の研究において、長年にわたって続けられている数理解析研究所での非線形波動に関する共同研究集会は大変有益であった。研究発表の場を与えていただいただけでなく、参加者の皆様からは役立つアドバイスをたくさんいただいた。また、研究集会での各講演はいずれも興味深く、非線形波動分野の研究の発展を実感することができた。この研究集会の歴代の世話人の方々や、熱心に参加していただいた皆様に心から感謝する次第である。